О переборных алгоритмах проверки вложения конечнозначных структур

IV совместное рабочее совещание
ИПС имени А.К. Айламазяна РАН
и
МГТУ имени Н.Э. Баумана
по функциональному языку Рефал

Евгений Шевляков
МГТУ им. Баумана

Москва 2021

Логики

Пусть L задана набором базисных операций. Множество F(L) функций, определяемых L есть множество операций, замкнутое относительно базисных операций .

Скажем, что L_1 функционально вкладывается в L_2 ($L_1 \subseteq L_2$), если базис L_1 входит в $F(L_2)$.

Многозначные логики

NOT(A)

A	$\neg A$
F	T
U	U
T	F

AND(A, B)

$A \land B$		B		
		F	**U**	**T**
A	**F**	F	F	F
	U	F	U	U
	T	F	U	T

OR(A, B)

$A \lor B$		B		
		F	**U**	**T**
A	**F**	F	U	T
	U	U	U	T
	T	T	T	T

Представление логики в рефале

```
Name = L
Values = [0, 1]
+ {
  0 0 = 0;
  s.x s.y = 1;
}
* {
  1 1 = 1;
  s.x s.y = 0;
}
→ {
   1 0 = 0;
   s.x s.y = 1;
}
```

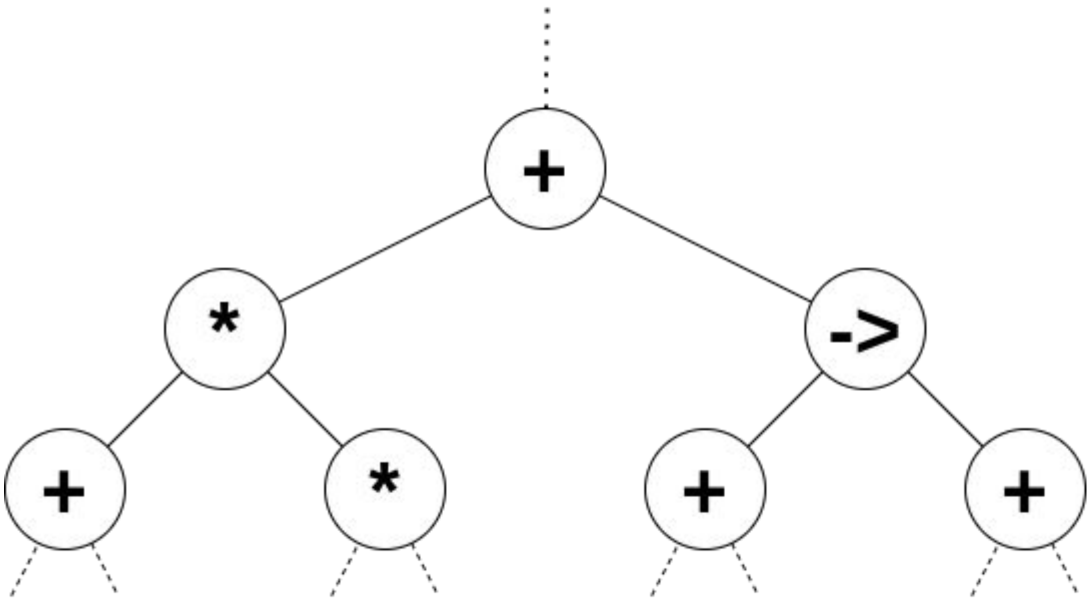
Общий вид алгоритма

```
подготовка
цикл:
   развертка
   свертка
окончание
```

Симметрический алгоритм

- Перебирает **все** возможные композиции

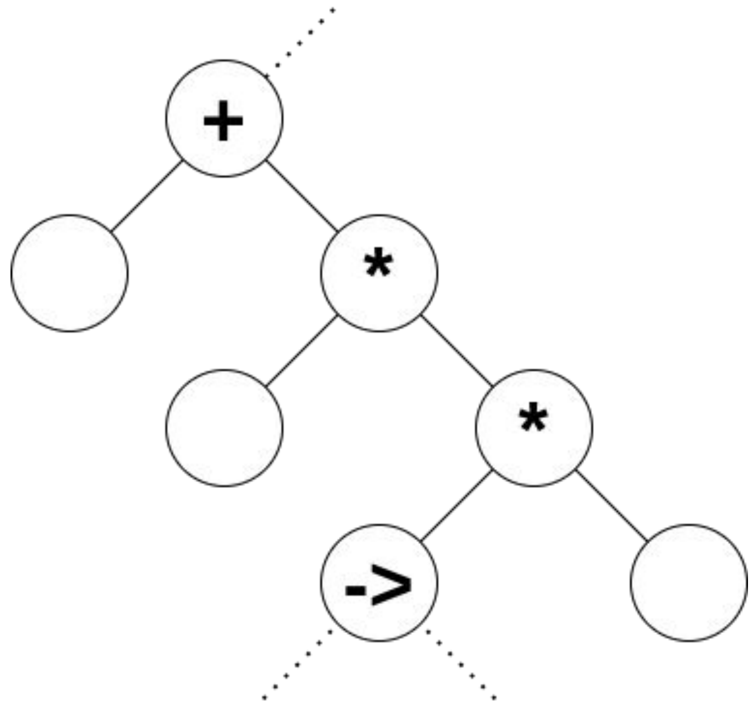
- Медленный



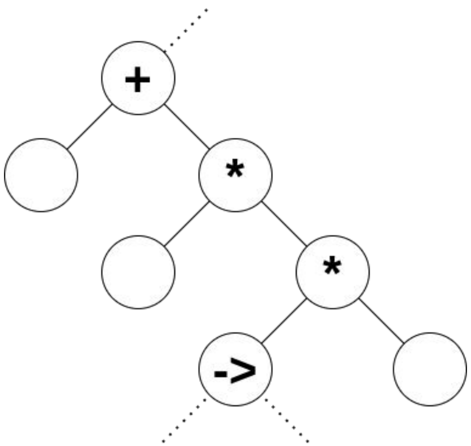
Асимметрический алгоритм

- Перебирает ограниченный класс композиций

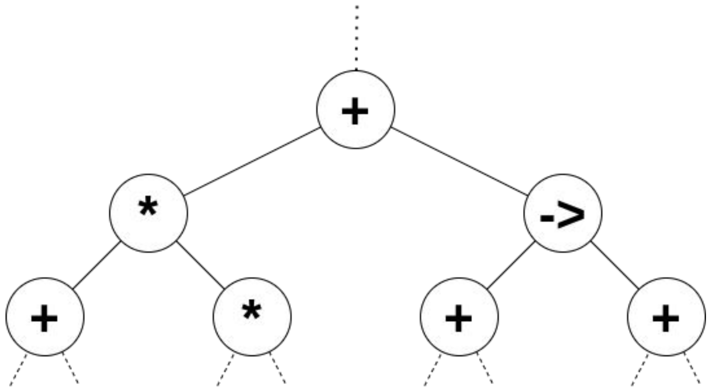
- Быстрый



Агрегированный алгоритм



- Объединяет идеи
- Перебирает все композиции
- Средний по скорости



Оптимизации

Коммутативность:

Если $f(a, b) = f(b, a)$, то $f(b, a)$ не генерируется

Транзитивность:

$$L_1 \subseteq L_2 \wedge L_2 \subseteq L_3 \implies L_1 \subseteq L_3$$

Неразличимость значений:

$V -$ множество логических значений

$R_L -$ отножение неразличимости для логики L

$$\exists x, y \in V : \langle x, y \rangle \in R_{L_1} \wedge \langle x, y \rangle \notin R_{L_2} \implies L_2 \nsubseteq L_1$$

Область отображения:

$$\exists W \subseteq V : \forall a, b \in W, \forall f \in L_1 : f(a, b) \in W$$

$$\exists g \in L_2 : \exists a, b \in W : g(a, b) \notin W \implies L_2 \nsubseteq L_1$$

Оптимизация: Замыкание области значений

V — множество логических значений

Проверяем $L_2 \subseteq L_1$

$\exists W \subset V : \forall f \in L_1 \; \forall a, b \in W \;\; f(a, b) \in W$

$\forall g \in L_2 : rng(g) \supset W$

Следует выражать из $\forall f \in L_1 : rng(f) \supset W$

```
Name = LevinMikenberg_1_10alt
Values = [0, D, T, 1]

Imply {
 1 1 = 1;
 1 s.x = 0;
 s.x s.y = 1;
}
Not {
 1 = 0;
 0 = 1;
 T = T;
 D = 0;
}
```

```
Name = LevinMikenberg_2_9alt
Values = [0, D, T, 1]

Imply {
 0 0 = 1;
 0 s.x = 0;
 s.x s.y = 1;
}
Not {
 1 = 0;
 0 = 1;
 T = T;
 D = 1;
}
```

```
function Not in LM_2_9alt cannot be constructed in the basis ['Not'] of LM_1_10alt
```

Логики Левина–Микенберг

$\vee_1$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	1	1	1
$\top$	1	0	0	0
$\bot$	1	0	0	0
0	1	0	0	0

$\&_1$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	0	0	0
$\top$	0	0	0	0
$\bot$	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$\Rightarrow_1$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	0	0	0
$\top$	1	1	1	1
$\bot$	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\vee_2$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	1	1	1
$\top$	1	1	1	1
$\bot$	1	1	1	1
0	1	1	1	0

$\&_2$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	1	1	0
$\top$	1	1	1	0
$\bot$	1	1	1	0
0	0	0	0	0

$\Rightarrow_2$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	1	1	0
$\top$	1	1	1	0
$\bot$	1	1	1	0
0	1	1	1	1

$\vee_3$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	1	1	1
$\top$	1	1	1	1
$\bot$	1	1	0	0
0	1	1	0	0

$\&_3$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	1	0	0
$\top$	1	1	0	0
$\bot$	0	0	0	0
0	0	0	0	0

$\Rightarrow_3$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	1	0	0
$\top$	1	1	0	0
$\bot$	1	1	1	1
0	1	1	1	1

$\vee_4$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	1	1	1
$\top$	1	0	1	0
$\bot$	1	1	1	1
0	1	0	1	0

$\&_4$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	0	1	0
$\top$	0	0	0	0
$\bot$	1	0	1	0
0	0	0	0	0

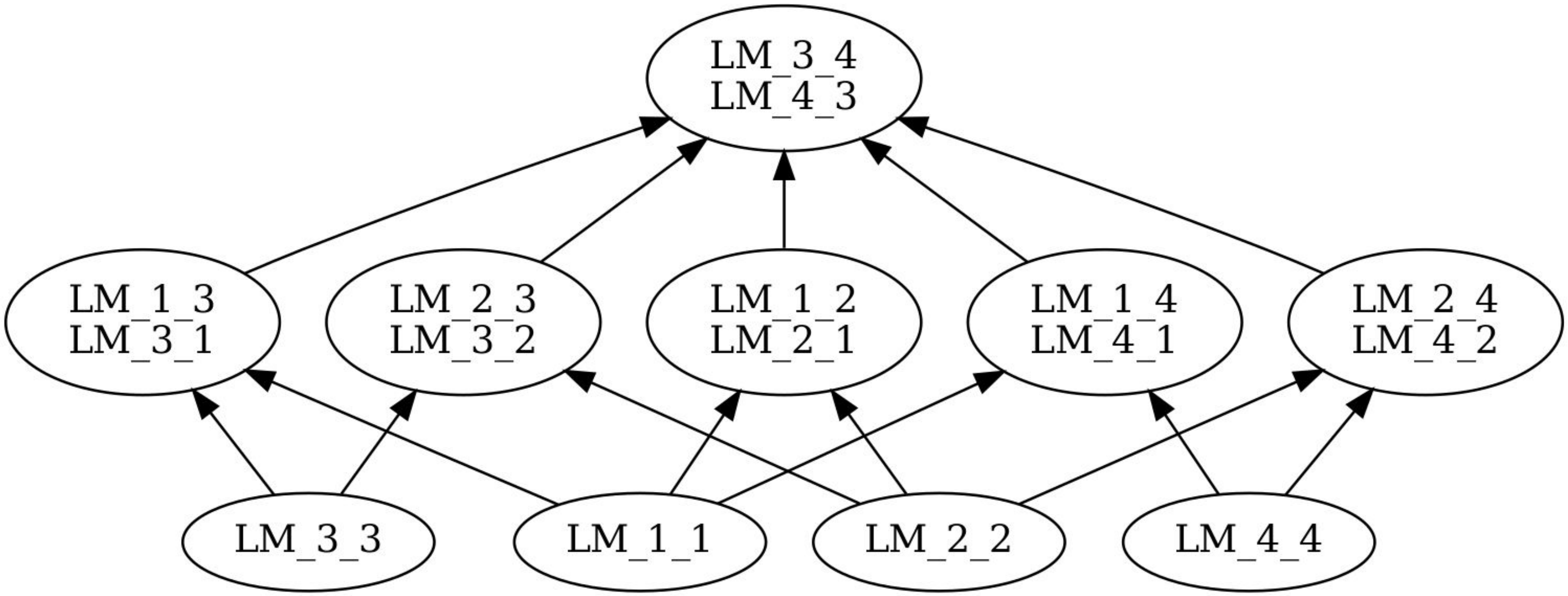
$\Rightarrow_4$	1	$\top$	$\bot$	0
1	1	0	1	0
$\top$	1	1	1	1
$\bot$	1	0	1	0
0	1	1	1	1

	1	$\top$	$\bot$	0
$\neg 1$	0	1	1	1
$\neg 2$	0	0	0	1
$\neg 3$	0	0	1	1
$\neg 4$	0	1	0	1
$\neg 5$	0	$\bot$	$\top$	1
$\neg 6$	0	$\top$	$\bot$	1
$\neg 7$	0	$\top$	1	1
$\neg 8$	0	0	$\top$	1
$\neg 9$	0	$\top$	1	1
$\neg 10$	0	$\top$	0	1
$\neg 11$	0	1	$\bot$	1
$\neg 12$	0	0	$\bot$	1
$\neg 13$	0	$\top$	$\top$	1
$\neg 14$	0	$\bot$	$\bot$	1
$\neg 15$	0	$\bot$	0	1
$\neg 16$	0	1	$\top$	1

16 логик Левина-Микенберг

120 сравнений

2^16 возможных функций



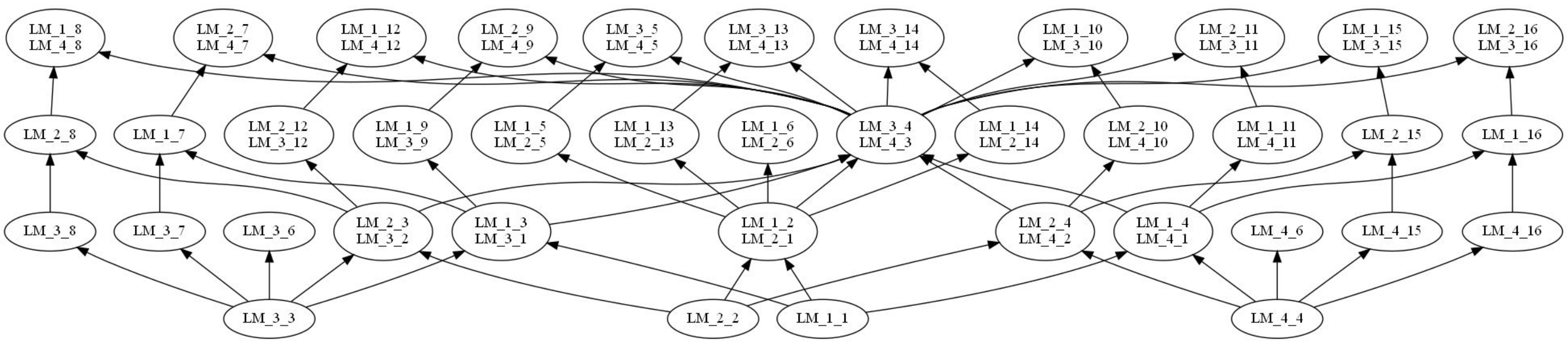
Логи по 16 логикам

```
values {('1', 'T')} are discernible in LM_4_2, indiscernible in LM_3_2

values {('1', 'D')} are discernible in LM_3_2, indiscernible in LM_4_2

values {('1', 'T')} are discernible in LM_1_1, indiscernible in LM_3_2

values {('1', 'T')} are discernible in LM_2_4, indiscernible in LM_3_2

values {('1', 'D')} are discernible in LM_3_2, indiscernible in LM_2_4

values {('1', 'T')} are discernible in LM_3_4, indiscernible in LM_3_2

values {('1', 'T')} are discernible in LM_1_2, indiscernible in LM_3_2

values {('D', 'T')} are discernible in LM_3_2, indiscernible in LM_1_2

values {('1', 'D')} are discernible in LM_1_1, indiscernible in LM_4_2
```

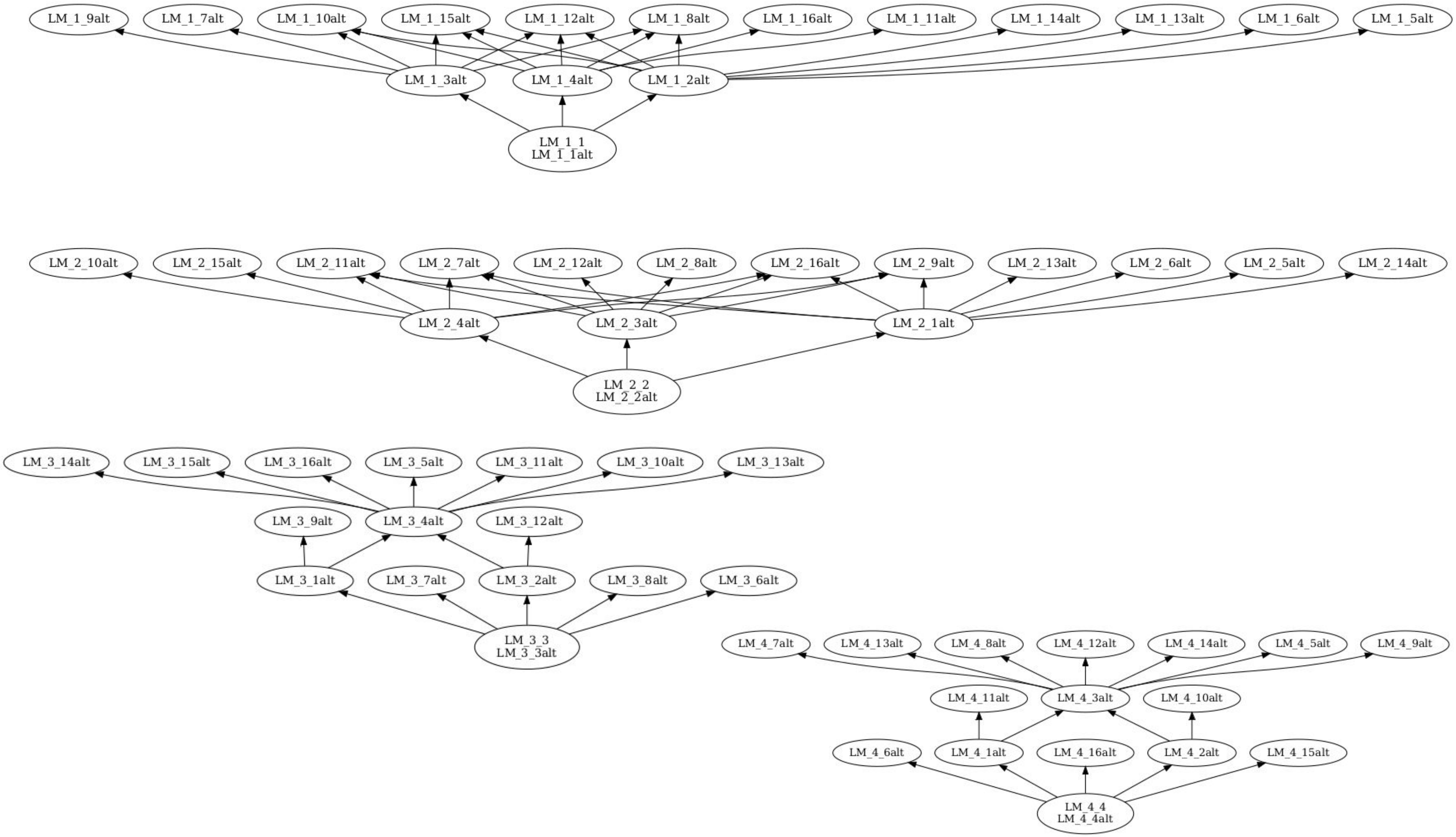
64 логики Левина-Микенберг

2016 сравнений

бОльшая область значений



Эквивалентность 64~64alt



github.com/KoshiNoLimit/Logics